

1. Kalastaja istuu paikoilleen ankkuroidussa veneessä ja tarkkailee aallokkoa. Hän havaitsee, että veneen nousumatka aallon pohjalta huipulle on 0,62 m ja että nousu kestää 2,5 s. Hän havaitsee myös, että kahden peräkkäisen huipun välimatka on 6,0 m.
- Mikä on veden pinnan aaltojen etenemisnopeus?
 - Mikä on aaltoliikkeen amplitudi?
 - Jos veneen nousumatka olisikin 0,30 m ja muut tiedot pysyisivät muuttumattomina, miten edellisten kohtien vastaukset muuttuisivat?

2. Mitkä funktioista

- a) $y(x,t) = (x-t)^2$, b) $y(z,t) = 5 \sin^2[4\pi(t+z)]$ ja c) $y(x,t) = 1/(2x^2 - t)$ etenevät muotonsa säilyttäen vakionopeudella, kun aika t kasvaa tasaisesti? Anna lisäksi etenemissuunta ja nopeus, kun funktiot ovat SI-yksiköissä.

3. Funktion $f(t)$ aikakeskiarvo aikavälillä $t - T/2 \rightarrow t + T/2$ määritellään integraalina

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t) dt.$$

Osoita, että funktion $f(t) = \cos^2 \omega t$ aikakeskiarvo yhden jakson aikana 1/2.

4. Tarkastellaan kahden aallon $y_1 = 4A \cos(\alpha)$ ja $y_2 = 5A \cos(\alpha + \varphi_0)$, missä $\alpha = kx - \omega t$, superpositiota.
- Osoita, että summa-aallon amplitudi on $\sqrt{41 + 40 \cos(\varphi_0)} A$
 - Minkä rajojen välissä amplitudi vaihtelee aaltojen välisen vaihe-eron φ_0 vaihdellessa?
 - Mikä on amplitudi, kun vaihe-ero $\pi/3$?
5. Positiivisen x -akselin suuntaisen köyden toinen pää on kiinnitetty origoon ($x = 0, y = 0$). Köydessä etenee negatiivisen x -akselin suuntaan harmoninen aalto nopeudella 84,0 m/s. Aallon amplitudi on 1,5 mm ja taajuus 120 Hz. Aalto heijastuu kiinnityspisteestä $x = 0$ ja heijastuneen ja tulevan aallon superpositiona syntyy seisova aalto.
- Esitä seisovan aallon aaltofunktio.
 - Paikallista ne köyden pisteet, jotka eivät liiku ollenkaan.
 - Paikallista ne köyden pisteet, jotka liikkuvat eniten ja laske vastaavat maksimipoikkeamat ja maksiminopeudet.
6. Viulussa on neljä 32,6 cm pitkää kieltä, joiden perusvärähdystaajuudet ovat 196, 294, 440 ja 659 Hz.
- Mikä on seisovan aallon aallonpituus kussakin kielessä?
 - Mitkä ovat ensimmäiset ylivärähdystaajuudet ja aallonpituudet kielissä?
 - Värähtelevä kieli synnyttää ilmaan ääniaallon. Mitkä ovat ääniaaltojen aallonpituudet kohdan a) tapauksissa? Oleta äänen nopeudeksi ilmassa 344 m/s.

OHJEITA JA VASTAUKSET

Harjoitus 1

- 1,2 m/s
 - 0,31 m
 - etenemisnopeus ei muutu, amplitudi pienenee arvoon 0,15 m

- etenee muotonsa säilyttäen $+x$ -suuntaan 1 m/s
 - etenee muotonsa säilyttäen $-z$ -suuntaan 1 m/s
 - ei etene muoto säilyen

- Ohjeita:* Laske aikakeskiarvo ajanhetken $t = 0$ ympäristöön sijoittuvan periodin yli, jolloin integroitava väli on $-T/2$:sta $T/2$:een. Sovella trigonometristä identiteettiä $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$ ja integroi.

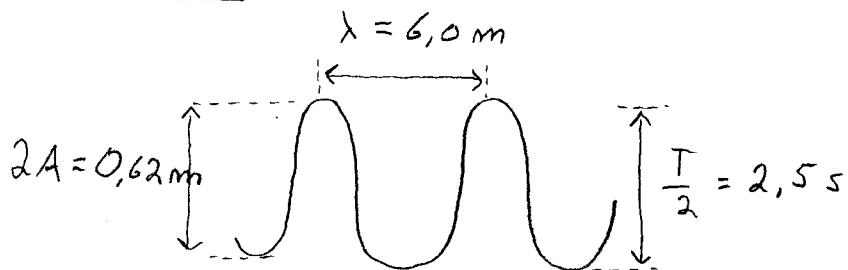
- Ohje:* Pura y_2 auki ja yhdistele siten sopivasti y_1 :n kanssa muotoon $B \sin(\alpha + \beta)$, missä $B = A\sqrt{41 + 40 \cos \varphi_0}$.
 - vaihteluväli on $9A - 1A$
 - noin 7,8A

- $y(x, t) = (3,0 \text{ mm}) \sin(8,98 \text{ m}^{-1}x) \sin(754 \text{ s}^{-1}t)$
 - 0; 0,350 m; 0,700 m; ...
 - 0,175 m; 0,525 m; ... maksimipoikkeama 3,00 mm ja -nopeus 2,26 m/s

- aallonpituus 65,2 cm kaikissa kielissä
 - Taajuudet 392, 588, 880 ja 1318 Hz. Aallonpituus kaikissa 32,6 cm.
 - 176, 117, 78,2 ja 52,2 cm

HARJOITUS 1

1.



$$\lambda = 6,0 \text{ m}$$

$$A = 0,31 \text{ m}$$

$$T = 5,0 \text{ s}$$

a) $v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = 1,2 \text{ m/s}$

b) $A = 0,31 \text{ m}$

c) $2A = 0,30 \text{ m} \Rightarrow A = 0,15 \text{ m}$

$$v = \frac{\lambda}{T} = 1,2 \text{ m/s}$$

2.

a) $x - vt = x - \cancel{t}$ ELI $v = 1,0 \text{ m/s}$
POSITIIVISEN X-AKSELIN SUUNTAAN

b) $z + vt = \cancel{t} + z = z + \cancel{t}$ ELI $v = 1,0 \text{ m/s}$
NEGATIIVISEN Z-AKSELIN SUUNTAAN

c) X JA \cancel{t} EIVÄT ESIINNY MUODOSSA $x \mp vt$, JOTEN FUNKTIO EI ETENE VAKIONOPEUDELLA MUOTOJNSA SÄILYTTÄEN

3.

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \omega t \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \omega t \, dt & \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos 2\omega t) \, dt \\ &= \frac{1}{2T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega T} (\sin \omega T + \sin \omega T) \approx \frac{1}{2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

$$4. \begin{cases} y_1 = 4A \cos \alpha \\ y_2 = 5A \cos(\alpha + \varphi_0) = 5A \cos \alpha \cos \varphi_0 - 5A \sin \alpha \sin \varphi_0 \end{cases}$$

$$a) y_1 + y_2 = (4A + 5A \cos \varphi_0) \cos \alpha - (5A \sin \varphi_0) \sin \alpha$$

$$\text{MERKITÄÄN } \begin{cases} a = B \cos \beta = 4A + 5A \cos \varphi_0 \\ b = B \sin \beta = 5A \sin \varphi_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = B \cos \beta \cos \alpha - B \sin \beta \sin \alpha = B \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{TÄSSÄ AMPLITUDI } B = \sqrt{a^2 + b^2} = A \sqrt{41 + 40 \cos \varphi_0}$$

$$b) B \text{ ON MAKSIMI, KUN } \cos \varphi_0 = +1 \Rightarrow B_{\text{MAX}} = 9A$$

$$B \text{ ON MINIMI, KUN } \cos \varphi_0 = -1 \Rightarrow B_{\text{MIN}} = A$$

$$c) \cos \pi/3 = \frac{1}{2} \Rightarrow B = A \sqrt{61} \approx \underline{7,8A}$$

$$5. a) y(x, t) = (2A \sin kx) \sin \omega t$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 120 \text{ 1/s}}{84,0 \text{ m/s}} = 8,98 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 120 \text{ 1/s} = 240\pi \text{ s}^{-1}$$

$$2A = A_{\text{sw}} = 2 \cdot 1,5 \text{ mm} = 3,00 \text{ mm}$$

$$b) \text{ SOLMUPISTEET } \lambda/2 : N \text{ VÄLEW } x = m \lambda/2$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{84,0 \text{ m/s}}{120 \text{ 1/s}} = 0,700 \text{ m}$$

$$1. \text{ SOLMU ORIGOSSA } x = 0$$

$$2. \text{ SOLMU } x = \lambda/2 = 35,0 \text{ cm}$$

⋮

$$c) \text{ KUPUKOHDAT SOLMUJEN PUOLIVÄLEISSÄ}$$

$$x = (m + \frac{1}{2}) \lambda/2 = 17,5 \text{ cm}, 52,5 \text{ cm}, \dots$$

KUPUKOHDASSA ($\sin kx = \pm 1$) MAKSIMIPOIKKEAMA SAADAAAN, KUN $\sin \omega t = \pm 1$. TULEE

$$|y|_{\text{MAX}} = 2A = 3,00 \text{ mm}$$

KUPUKOHDASSA ($\sin kx = \pm 1$) NOPEUS SAADAAN
DERIVOIMALLA

$$v = \frac{d}{dt} (2A \sin \omega t) = 2A\omega \cos \omega t$$

JOKA MAKSIMISSAAN ($\cos \omega t = \pm 1$) ON

$$|v|_{\max} = 2A\omega = 3,00 \text{ mm} \cdot 240\pi \text{ s}^{-1} = \underline{\underline{2,26 \text{ m/s}}}$$

6. a) $\lambda_1 = \frac{2L}{1} = 2 \cdot 32,6 \text{ cm} = \underline{\underline{65,2 \text{ cm}}}$ KAIKISSA KIELISSÄ

b) $f_2 = 2f_1 : 392, 588, 880 \text{ JA } 1318 \text{ Hz}$

AALONPITUUS $\lambda_2 = \frac{2L}{2} = \underline{\underline{32,6 \text{ cm}}}$ KAIKISSA KIELISSÄ

c) TAAJUUS SIIRTYY ILMAAN

$$\lambda_{\text{ILMASSA}} = \frac{v_{\text{ILMASSA}}}{f} = \frac{344 \text{ m/s}}{f}$$

f/Hz	$\lambda_{\text{ILMASSA}}/\text{cm}$
196	1,76
294	1,17
440	0,782
659	0,522