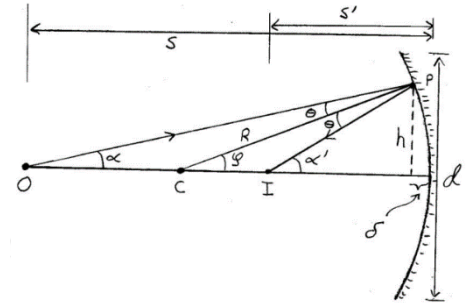


RATKAISUT 5

1. Koveran peilin kaarevuussäde R on 20 cm ja myös sen halkaisija d on 20 cm (ks. kuva). Esinepiste O sijaitsee optisella akselilla 30 cm:n etäisyydellä peilistä. Kuvapiste I on tarkasti ottaen kuvaviiva pitkin optista akselia, koska eri korkeuksilta (h) heijastuvat säteet muodostavat kuvapisteen hieman eri paikkaan.



- Laske paraksiaalisen approksimaation mukainen kuvapisteen paikka.
- Osoita, että kulmat kuvassa toteuttavat yhtälön $\alpha + \alpha' = 2\varphi$
- Laske kulmien avulla kuvaviivan pituus. Miten viiva sijoittuu optiselle akselille suhteessa paraksiaalisen approksimaation mukaisen kuvapisteeseen paikkaan?

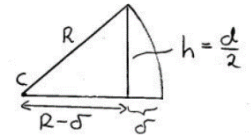
Ratkaisu

- a) Tässä $f = R/2 = +10$ cm ja $s = 30$ cm. Tulee $s' = \frac{sf}{s-f} = +15$ cm.

- b) Kolmiosta OPC: $\alpha + \theta + (180^\circ - \varphi) = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \varphi - \theta$
 Kolmiosta CPI: $(180^\circ - \alpha') + \theta + \varphi = 180^\circ \Rightarrow \alpha' = \varphi + \theta$
 Yhdistettynä: $\alpha + \alpha' = 2\varphi$.

- c) Kuvaviivan toinen pää on paraksiaalinen kuvapiste, joka laskettiin a-kohdassa. Tämä piste muodostuu säteille, joilla $h \approx 0$. Toisen pään muodostavat säteet, jotka heijastuvat korkeudelta $h = d/2$. Lasketaan kuvan etäisyys s' :

$$\tan \alpha' = \frac{h}{s' - \delta}, \text{ josta } s' = \delta + \frac{h}{\tan \alpha'}. \text{ Tässä tarvittava } \delta \text{ saadaan viereisestä}$$



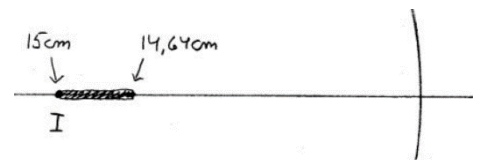
kuvasta laskemalla $\delta = R - (R - \delta) = R - \sqrt{R^2 - h^2}$. Edelleen b-kohdan perusteelle $\alpha' = 2\varphi - \alpha$, joten saadaan

$$s' = (R - \sqrt{R^2 - h^2}) + \frac{h}{\tan(2\varphi - \alpha)} = 14,641 \text{ cm}$$

Tässä on käytetty numeroarvoja: $h = d/2 = 10$ cm, $R = 20$ cm, $s = 30$ cm,

$$\varphi = \arctan\left(\frac{h}{R-\delta}\right) = 30,0000^\circ \text{ ja } \alpha = \arctan\left(\frac{h}{s-\delta}\right) = 20,1039^\circ$$

Kuvaviivan pituudeksi tulee 0,36 cm. Kuvaviiva ulottuu paraksiaalisesta kuvapisteesestä kohti peiliä.



2. Kuperan (positiivisen) ohuen linssin taitekerroin on 1,50 ja sen polttoväli ilmassa on 30,0 cm. Linssi upotetaan läpinäkyvään nesteeseen, jolloin siitä tulee negatiivinen linssi, jonka polttoväli on 188 cm. Laske nesteen taitekerroin.

Ratkaisu

Linssintekijän yhtälö $\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$. Tässä n_2 on linssin ja n_1 ympäristön arvo.

Ilmassa $\frac{1}{f_i} = \frac{n_2 - 1}{1} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = 0,50 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = \frac{1}{30,0 \text{ cm}}$

Nesteessä $\frac{1}{f_n} = \frac{n_2 - n}{n} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = \frac{1,50 - n}{n} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = \frac{1}{-188 \text{ cm}}$

Suhde $\frac{1/f_n}{1/f_i} = \frac{1,50 - n}{0,50n} = \frac{30}{-188}$ eli $1,50 - n = -\frac{15}{188}n$, josta $n = 1,63$.

3. Lasisen ($n = 1,50$) puolipallon ($R = 7,5 \text{ cm}$) kaareva pinta on hopeoitu heijastavaksi peiliksi. Puolipallon sisällä keskiakselilla 5 cm:n syvyydellä tasopinnasta sijaitsee pieni ilmakupla. Kun kuplaa katsotaan tasopinnan suunnasta, nähdään kaksi kuvaa. Miten ne syntyvät ja missä kohtaa ne näytävät olevan?

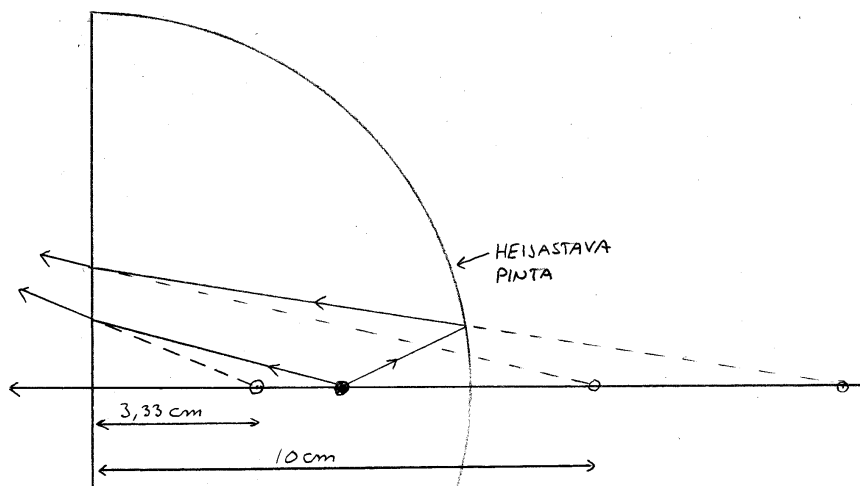
Ratkaisu:

Esine on musta täplä viereisessä kuvassa. Tasopinnan suunnasta katsottaessa nähdään kaksi kuvaa:

Kuva 1: Esineestä lähtee kaksi sädetä kohti tasopintaa. Toinen säde etenee optisen akselin suuntaisena suoraan pinnan läpi ja toinen pienessä kulmassa tasopinnasta taittuen. Läpi menneiden säteiden jatkeet leikkaavat ja muodostavat kuvan.

Kuvausyhtälö (kun $R = \infty$)

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \text{ on } \frac{1,50}{5 \text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1 - 1,50}{\infty} = 0, \text{ josta } s' = -3,33 \text{ cm.}$$



Kuva 2.

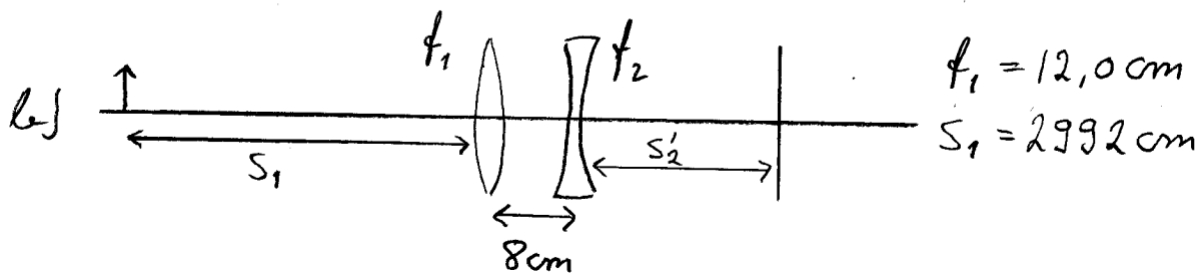
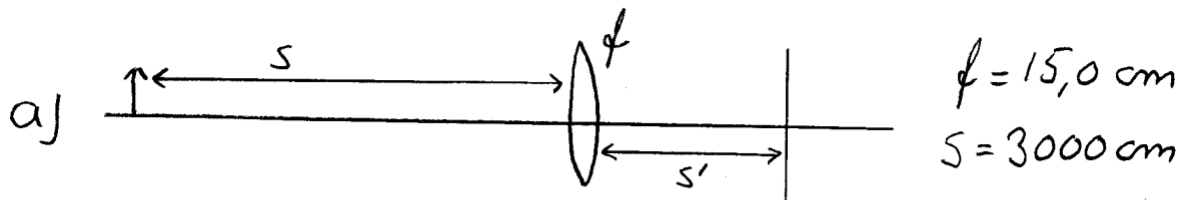
Kaksi sädetä lähtee kohti pallopintaa, joka on nyt peili. Heijastumisen jälkeen säteet jatkavat kohti tasopintaa, jossa tapahtuu taittuminen. Lopullinen kuva syntyy taas säteenjatkeilla ja sen etäisyys on 10 cm tasopinnan takana (katso kuva). Tuloksen saat, kun lasket ensin kuvauksen koverassa peilissä ($s' = -7,5 \text{ cm}$) ja sen jälkeen kuvauksen tasopinnassa. Jälkimmäisessä kuvauksessa esineen etäisyys on $s = +15,0 \text{ cm}$. Lopulta $s' = -10,0 \text{ cm}$.

1. kuvaus $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ on $\frac{1}{2,5 \text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{+7,5 \text{ cm}}$, josta $s' = -7,5 \text{ cm}$.

2. Kuvaus $\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ on $\frac{1,50}{15 \text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1 - 1,50}{\infty}$, josta $s' = -10,0 \text{ cm}$

4. a) Kameran linssin polttoväli on 15,0 cm. Kuinka korkea kuva muodostuu filmille 30,0 m:n etäisyydellä olevasta 1,80 m korkeasta henkilöstä.
- b) Kameran linssi korvataan kauko-objektiivilla, joka koostuu positiivisesta linssistä (polttoväli 12 cm) ja sen takana 8 cm:n etäisyydellä olevasta negatiivisesta linssistä. Negatiivinen linssi sijaitsee kameran alkuperäisen linssin kohdalla. Mikä on oltava negatiivisen linssin polttoväli, jotta henkilön kuva muodostuu terävänä filmille? Kuinka paljon suurempi kuva on verrattuna kohdan a) kuvaan?

Ratkaisu:



a) $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ on nyt $\frac{1}{3000 \text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{15 \text{ cm}}$, josta $s' = 15,075377 \text{ cm}$

$m = -\frac{s'}{s} = -0,00502513$ ja kuvan koko on 0,9045 cm.

b) $s_1 = 2992 \text{ cm}$ ja $f_1 = 12,0 \text{ cm}$ ja saadaan $s_1' = 12,048322 \text{ cm}$.

$s_2 = -4,048322 \text{ cm}$ ja $s_2' = 15,075377 \text{ cm}$ ja saadaan $f_2 = -5,534568 \text{ cm}$

$m = m_1 \cdot m_2 = (-)(-)\frac{s_1' s_2'}{s_1 s_2} = -0,01499540$ ja kuvan koko on 2,6992,

joka on $2,6992/0,9045 = 2,98$ kertaa suurempi kuin kohdassa a.

5. Henkilön molemmat silmät ovat likinäköisiä ja näköä korjataan piilolinseillä. Vasemman linssin diopteriluku on -7 ja oikean -5 . Molempien silmien korjattu lähipiste saadaan etäisyydelle 15 cm ja kaukopiste äärettömyyteen. Laske lähi- ja kaukopisteen paikka ilman piilolinsejä molemmille silmille.

Ratkaisu:

$$f_{\text{vasen}} = \frac{1}{-7} \text{ m} = -\frac{100}{7} \text{ cm}, f_{\text{oikea}} = \frac{1}{-5} \text{ m} = -\frac{100}{5} \text{ cm}$$

vasemman silmän kaukopiste

Äärettömyydessä ($s = \infty$) oleva esine kuvautuu henkilön kaukopisteeseen ($s' = ?$).

Kuvausyhtälöllä $s' = -\frac{100}{7} \text{ cm} \approx -14,3 \text{ cm}$ (silmän edessä)

oikean silmän kaukopiste

Äärettömyydessä ($s = \infty$) oleva esine kuvautuu henkilön kaukopisteeseen ($s' = ?$).

Kuvausyhtälöllä $s' = -\frac{100}{5} \text{ cm} = -20,0 \text{ cm}$ (silmän edessä)

vasemman silmän lähipiste

15 cm:n etäisyydellä ($s = 15 \text{ cm}$) oleva esine kuvautuu henkilön lähipisteeseen ($s' = ?$).

Kuvausyhtälöllä $s' = -\frac{300}{41} \text{ cm} \approx -7,32 \text{ cm}$ (silmän edessä)

oikean silmän lähipiste

15 cm:n etäisyydellä ($s = 15 \text{ cm}$) oleva esine kuvautuu henkilön lähipisteeseen ($s' = ?$).

Kuvausyhtälöllä $s' = -\frac{300}{35} \text{ cm} \approx -8,57 \text{ cm}$ (silmän edessä)

6. Mikroskoopin objektiivin polttoväli on 16,0 mm ja okulaarin 25,0 mm. Kummatkin ovat ohuita linssejä ja niiden välimatka on 221 mm. Mikroskooppia käytetään siten, että lopullinen kuva muodostuu äärettömyyteen (kaukopisteeseen).
- Laske mikroskoopin optinen pituus ja suurennus.
 - Kuinka kaukana objektiivista tutkittava kohde sijaitsee?
 - Mikroskoopin kuvaa tulee katsomaan likinäköinen henkilö, jonka kaukopiste on 50 cm:n etäisyydellä. Miten paljon hän joutuu siirtämään esinettä nähdäkseen kuvan tarkasti omassa kaukopisteessään. Mikä on tällöin mikroskoopin suurennus, jos oletetaan, että likinäköisen henkilön lähipiste on normaalilla etäisyydellä 25 cm?

Ratkaisu

a) $L = d - f_o - f_e = 180 \text{ mm}.$

Lopullinen kuva muodostuu kaukopisteeseen (äärettömyyteen), joten okulaarin kulmasuurennus on $M_e = 250 / f_e = 10$. Välikuva on okulaarin polttotasossa, joten objektiivikuvauksessa on siis $s_o' = d + f_e = 196 \text{ mm}$ ja kohteen etäisyys (s_o) saadaan laskulla

$$s_o = \frac{s_o' f_o}{s_o' - f_o} = 17,4222 \text{ cm. Suurennus } m_o = -\frac{s_o'}{s_o} = -11,250.$$

Kokonaissuurennus: -112,5.

b) $s_o = 17,4222 \text{ cm}$ eli noin 17,4 cm

- c) Okulaarikuvauksessa lopullinen kuva pitää saada katsojan kaukopisteeseen eli 50 cm:n etäisyydelle okulaariin eteen. On siis $s_e' = -500 \text{ mm}$. Kuvausyhtälöllä saadaan välikuvan etäisyys okulaarista

$$s_e = \frac{s_e' f_e}{s_e' - f_e} = 23,81 \text{ mm.}$$

ja suurennus kulmasuurennuksena $M_e = 250 / s_e = 10,50$. Edelleen objektiivikuvauksessa kuvan etäisyys on $s_o' = d - s_e = 197,1905 \text{ mm}$ ja kuvausyhtälöllä päästään kohteen etäisyyteen

$$s_o = \frac{s_o' f_o}{s_o' - f_o} = 17,4129 \text{ mm}$$
 ja suurennukseen $m = -s_o' / s_o = 11,324$.

Vertaamalla b-kohtaan havaitaan, että kohdetta on siirrettävä lähemmäksi objektiivia 9,3 μm . Suurennus on -118,9.