761310A AALTOLIIKE JA OPTIIKKA
Ratkaisut 6

1. Kaksi sama-amplitudista lineaarisesti polarisoitunutta harmonista valoaaltoa $E_1 = E_0 \sin(\alpha_1 - \omega t)$ ja $E_2 = E_0 \sin(\alpha_2 - \omega t)$ interferoi varjostimella pisteessä *P*. Aaltojen sähkökenttävektorit värähtelevät kulmassa ϕ toistensa suhteen.

a) Osoita, että pisteessä *P* havaittava intensiteetti on $I = 2I_0(1+\cos\phi\cos\delta)$, missä $I_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$ ja $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$.

b) Osoita, että interferenssikuvion kontrasti on $V = \cos\phi$. Laske kontrasti tapauksissa $\phi = 0°$, $90°$ ja $30°$.

Ratkaisu

a) Summa-aallon $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ itseisarvon neliö

$$E^2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2)\cdot(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2) = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\phi$$

Intensiteetti

$$I = \langle S\rangle = \varepsilon_0 c^2\langle EB\rangle = \varepsilon_0 c\langle E^2\rangle = \varepsilon_0 c\langle E_1^2\rangle + \varepsilon_0 c\langle E_2^2\rangle + 2\varepsilon_0 c\cos\phi\langle E_1E_2\rangle$$

Tässä

$$\langle E_1^2\rangle = E_0^2\langle \sin^2(\alpha_1-\omega t)\rangle = E_0^2\left\langle\left[\sin\alpha_1\cos\omega t - \cos\alpha_1\sin\omega t\right]^2\right\rangle$$

$$= E_0^2\left[\sin^2\alpha_1\langle\cos^2\omega t\rangle + \cos^2\alpha_1\langle\sin^2\omega t\rangle - 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle\right]$$

$$= E_0^2\left[\frac{1}{2}\sin^2\alpha_1 + \frac{1}{2}\cos^2\alpha_1 - 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\cdot 0\right] = \frac{1}{2}E_0^2$$

$$\langle E_2^2\rangle = E_0^2\langle\sin^2(\alpha_2-\omega t)\rangle = \frac{1}{2}E_0^2 \text{ samoin kuin edellä}$$

ja

$$\langle E_1E_2\rangle = E_0^2\langle\sin(\alpha_1-\omega t)\sin(\alpha_2-\omega t)\rangle$$

$$= E_0^2\left\langle(\sin\alpha_1\cos\omega t - \cos\alpha_1\sin\omega t)(\sin\alpha_2\cos\omega t - \cos\alpha_2\sin\omega t)\right\rangle$$

$$= E_0^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\langle\cos^2\omega t\rangle + E_0^2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\langle\sin^2\omega t\rangle$$

$$-E_0^2(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2)\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle$$

$$= \frac{1}{2}E_0^2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_1\cos\alpha_2) = \frac{1}{2}E_0^2\cos(\alpha_2-\alpha_1).$$

Näitä soveltaen saadaan

$$I = \varepsilon_0 c\langle E_1^2\rangle + \varepsilon_0 c\langle E_2^2\rangle + 2\varepsilon_0 c\cos\phi\langle E_1E_2\rangle = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0I_0}\cos\delta\cos\phi$$

eli lopputulos $I = 2I_0(1+\cos\delta\cos\phi)$

b) Pätee $I_{max} = 2I_0[1+\cos\phi]$ ja $I_{min} = 2I_0[1-\cos\phi]$ ja kontrastiksi tulee

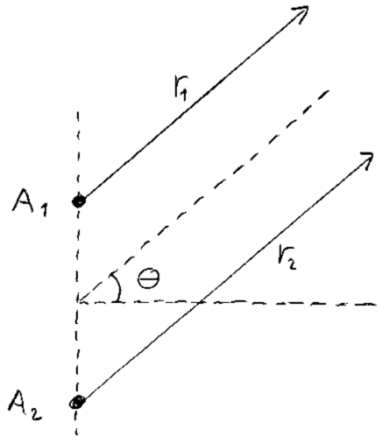
$$V = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \frac{2\cos\phi}{2} = \cos\phi.$$

$V(\phi = 0°) = \cos 0° = 1$, $V(90°) = \cos 90° = 0$ ja $V(30°) = \cos 30° = 0{,}87$

2. Radioasema, joka toimii taajuudella 1,50 MHz, käyttää kahta identtistä antennia (A_1 ja A_2 kuvassa) suunnatakseen lähetystehon haluttuun suuntaan. Antennien välimatkaksi on säädetty 400 m. Missä suunnissa θ antennien yhdysjanan keskinormaaliin nähden kaukana asemalta säteilykentän intensiteetti on suurin, kun antennit lähettävät radioaaltoja

a) samassa vaiheessa toistensa suhteen ($\varphi_{02} = \varphi_{01}$) ja

b) antennien välille on säädetty vaihe-ero $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pi / 2$.



Ratkaisu:

Vaihe-eron pitää toteuttaa konstruktiivisen interferenssin ehto, eli

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) = m2\pi .$$

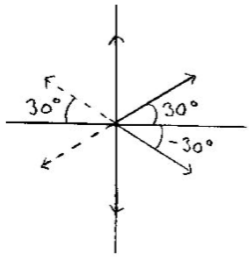
Tässä siis matkaero on $\Delta = (r_2 - r_1) = a\sin\theta$.

a) Kun $(\varphi_{01} - \varphi_{02}) = 0$, tulee $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta = m2\pi$,

josta $\sin\theta = m\dfrac{\lambda}{a} = m\dfrac{c}{af}$. Tässä $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s, $a = 400$ m ja $f = 1{,}50 \times 10^6$ 1/s.

Tulee $\theta = \arcsin(m \cdot 0{,}500) = 0°$, $\pm 30{,}0°$, $\pm 90{,}0°$, ..., kun $m = 0$, ± 1, ± 2, ...

ja symmetrisesti toiselle puolelle



b) Kun $(\varphi_{01} - \varphi_{02}) = \pi / 2$, tulee $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta + \dfrac{\pi}{2} = m2\pi$,

josta $\sin\theta = \left(m - \dfrac{1}{4}\right)\dfrac{\lambda}{a} = \left(m - \dfrac{1}{4}\right)\dfrac{c}{af}$.

Tulee

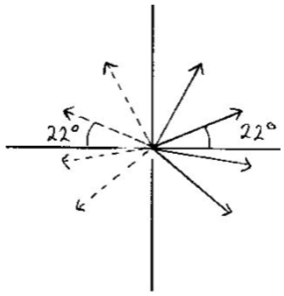
$\theta = \arcsin[(m - 1/4) \cdot 0{,}500] = -7{,}2°$, kun $m = 0$

$\theta = \arcsin[(m - 1/4) \cdot 0{,}500] = -38{,}7°$ ja $22{,}0°$, kun $m = -1$ ja $m = +1$

$\theta = \arcsin[(m - 1/4) \cdot 0{,}500] =$ error ja $61{,}0°$, kun $m = -2$ ja $m = +2$

$\theta = \arcsin[(m - 1/4) \cdot 0{,}500] =$ error ja error, kun $m = -3$ ja $m = +3$

ja symmetrisesti toiselle puolelle



3. Youngin kokeessa käytetään valoa, joka koostuu kahdesta aallonpituudesta. Toinen on 436 nm ja toinen tuntematon. Varjostimella 436 nm:n valon synnyttämän kuvion neljäs minimi sattuu samaan kohtaan kuin tuntemattoman aallonpituuden kolmas sivumaksimi. Laske tuntematon aallonpituus.

Ratkaisu:

$y_m^{(\min)} = (m + \tfrac{1}{2})\dfrac{\lambda R}{d} = (3 + \tfrac{1}{2})\dfrac{(436\text{ nm})R}{d}$ neljäs minimi

$y_m^{(\max)} = m\dfrac{\lambda R}{d} = 3\dfrac{\lambda R}{d}$ kolmas sivumaksimi

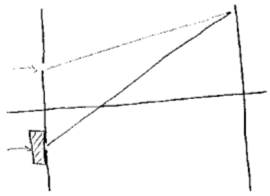
Nyt nämä ovat samassa kohdassa, joten

$\dfrac{7}{2} \cdot 436\text{ nm} = 3 \cdot \lambda$ ja tästä tulee $\lambda = \dfrac{7}{6} 436\text{ nm} = 509\text{ nm}$

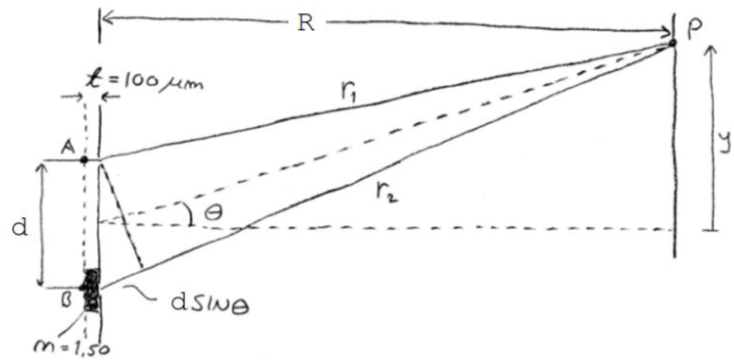
4. Youngin interferenssikokeessa rakojen välimatka on 0,50 mm ja valon aallonpituus 600 nm.

a) Interferenssijuovien välimatka varjostimella on 1,00 mm. Laske varjostimen etäisyys raoista.

b) Toisen raon eteen asetetaan 100 μm paksu lasilevy, jonka taitekerroin on 1,50. Kuinka paljon ja mihin suuntaan interferenssijuovakuvio siirtyy varjostimella?



Ratkaisu



a) $\Delta y = \dfrac{\lambda R}{d} \Rightarrow R = \dfrac{\Delta y}{\lambda} d = 83{,}3$ cm.

Tässä

$d = 0{,}50 \times 10^{-3}$ m

$\lambda = 600 \times 10^{-9}$ m

$\Delta y = 1{,}00 \times 10^{-3}$ m

b) Optinen matka AP

$AP = t + r_1$

Optinen matka BP

$BP = nt + r_2 = nt + r_1 + d\sin\theta$

Optinen matkaero $\Delta = nt - t + d\sin\theta = (n-1)t + d\dfrac{y}{R}$

Vaihe-ero maksimeille: $\delta = k\Delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}\left((n-1)t + d\dfrac{y_m^{(\max)}}{R}\right) = m2\pi$ ja tästä ratkaistaan

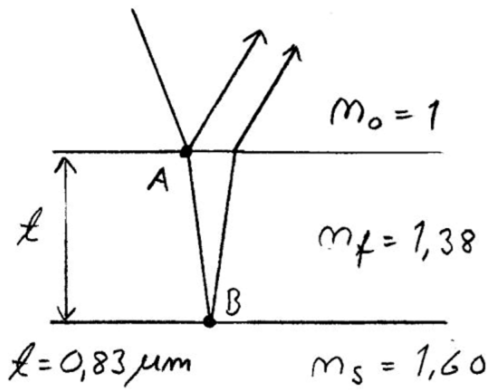
$y_m^{(\max)} = m\dfrac{\lambda R}{d} - (n-1)\dfrac{tR}{d}$

Kuvio siirtyy alaspäin matkan

$(n-1)\dfrac{tR}{d} = 8{,}33$ cm. Tässä $t = 100 \times 10^{-6}$ m ja $n = 1{,}50$.

5. Lasin ($n = 1{,}60$) pintaan höyrystetään ohut MgF_2-kalvo ($n = 1{,}38$), jonka paksuus on 0,83 μm. Kalvoon kohdistetaan valkoista valoa kohtisuorasti pintaa vastaan. Mitkä näkyvän alueen aallonpituudet vahvistuvat heijastuneessa valossa?

Ratkaisu



Optinen matkaero: $\Delta = 2n_f t$.

Vaihesiirto pisteessä A ja pisteessä B: ei vaikutusta.

Vaihe-ero: $\delta = k\Delta = \dfrac{2\pi}{\lambda} \cdot 2n_f t$

Konstruktiivinen interferenssi: $\delta = m2\pi$ eli

$\dfrac{2\pi}{\lambda} \cdot 2n_f t = m2\pi \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{m} \cdot 2n_f t = \dfrac{1}{m} \cdot 2n_f t = \dfrac{1}{m} \cdot 2290{,}8$ nm.

Kun $m = 3 \Rightarrow \lambda \approx 764$ nm (ei näkyvällä)

Kun $m = 4 \Rightarrow \lambda \approx 573$ nm. ok

Kun $m = 5 \Rightarrow \lambda \approx 458$ nm. ok

Kun $m = 6 \Rightarrow \lambda \approx 382$ nm. (ei näkyvällä)

6. Michelsonin interferometriä käytetään kaasun taitekertoimen määrittämiseen. Pituudeltaan L oleva kaasusäiliö, jonka molemmissa päissä on ikkunat, on asetettu toisen säteen reitille. Kokeessa käytetään aallonpituutta λ ja alkutilanteessa säiliössä on tyhjiö.

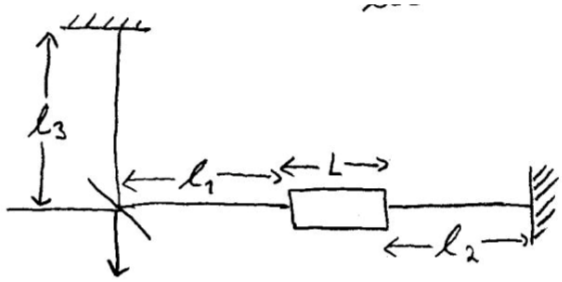
a) Kun kaasun paine säiliössä kasvaa tyhjiöstä ilmanpaineeseen, havaitaan interferenssikuviossa N:n renkaan muutos. Laske taitekerroin n lausuttuna N:n, λ :n ja L:n avulla.

b) Monenko renkaan muutos havaitaan, kun kaasuna on hiilidioksidi (n = 1,00045) 10 cm pitkässä kaasusäiliössä ja valona käytetään natriumin valoa 589 nm?

<u>Ratkaisu</u>

6. Viereiseinen kuvan mukaan optinen matkaero on $d = (l_1 + nL + l_2) - l_3$ ja sen muutos, kun säiliössä paine kasvaa tyhjiöstä (n = 1) ilman paineeseen (taitekerroin n) on

$$\Delta d = (n-1)L\ .$$



a) $2\Delta d = \Delta m\,\lambda$ eli nyt $2\Delta d = N\lambda$ ja tulee

$$2(n-1)L = N\lambda \Rightarrow n = \frac{N\lambda}{2L} + 1\ .$$

b) $N = \dfrac{2(n-1)L}{\lambda} = 152$