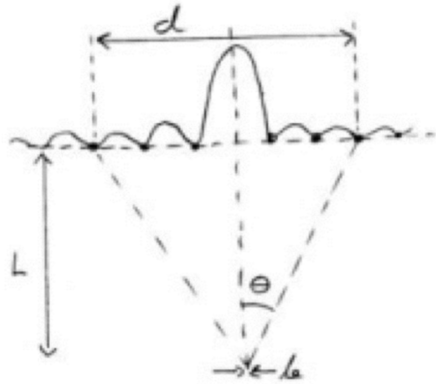
761310A AALTOLIIKE JA OPTIIKKA
Ratkaisut 7



1. a) $\frac{1}{2}kb\sin\theta = 3\pi \Rightarrow \frac{\pi}{\lambda}b\frac{d/2}{L} = 3\pi \Rightarrow b = \frac{6\lambda}{d}L$
$= 0{,}13500$ mm.

b) $\beta = \frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta = 11{,}697$ (rad) ja

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin 11{,}697}{11{,}697}\right)^2 = 0{,}0042653 = 0{,}427\ \%$$

2. Interferenssin maksimit (kun $\alpha = p\pi$) eli $a\sin\theta = p\lambda$ ja diffraktion minimit (kun $\beta = m\pi$) eli $b\sin\theta = m\lambda$ sattuvat samaan kohtaan (siis samalle θ:n arvolle) , jos $p\lambda / a = m\lambda / b$ eli

$$p = \frac{a}{b}m.$$

Nyt $p = \pm 4, \pm 8, \ldots = 4(\pm 1, \pm 2, \ldots) \Rightarrow p = 4m$ eli $a = 4b = 4 \cdot 0{,}100\ \text{mm} = 0{,}400\ \text{mm}$.

$$I = 4I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\alpha$$

Interferenssimaksimien kohdalla $\alpha = p\pi$, jolloin $\cos^2\alpha = 1$. Lisäksi tieto $b = a/4$ kertoo, että $\beta = \alpha/4$ ja intensiteetiksi tulee

$$I(p) = 4I_0\left(\frac{\sin(p\pi/4)}{(p\pi/4)}\right)^2.$$

Koska $I(p=0) = \lim_{p\to 0} 4I_0\left(\frac{\sin(p\pi/4)}{(p\pi/4)}\right)^2 = 4I_0$, saadaan suhteille $\frac{I(p)}{I(p=0)} = \left(\frac{\sin(p\pi/4)}{(p\pi/4)}\right)^2$.

Kun $p = 1$, suhteeksi tulee $(0{,}90032)^2 = 0{,}811$
Kun $p = 2$, suhteeksi tulee $(0{,}63662)^2 = 0{,}405$
Kun $p = 3$, suhteeksi tulee $(0{,}30011)2 = 0{,}0901$

3. $I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$. Nyt $N = 10$ ja $a = 5b$ eli $\alpha = 5\beta$.

a) Päämaksimeille $\alpha = m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$

$$I = I_0\left(\frac{\sin(\alpha/5)}{\alpha/5}\right)^2\left(\frac{\sin(10\alpha)}{\sin\alpha}\right)^2.$$

Suora sijoitus $\alpha = m\pi$ johtaa ongelmaan $I = I_0\left[\frac{\sin(m\pi/5)}{(m\pi/5)}\right]^2 \times \left(\frac{0}{0}\right)^2$, kun $m \neq 0$.

(tapaus $m = 0$ käsitellään kohdassa b)

On siis laskettava raja-arvo

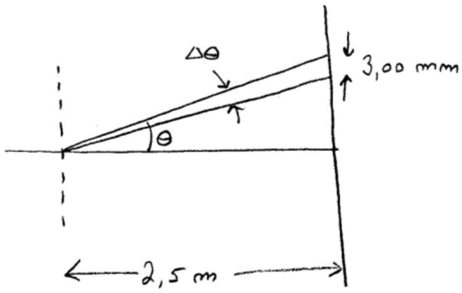
$$I = I_0 \left[\frac{\sin(m\pi/5)}{(m\pi/5)} \right]^2 \times \lim_{\alpha \to m\pi} \left[\frac{\sin(10\alpha)}{\sin\alpha} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\sin(m\pi/5)}{(m\pi/5)} \right]^2 \times \lim_{\alpha \to m\pi} \left[\frac{10\cos(10\alpha)}{\cos\alpha} \right]^2$$

$$= I_0 \left[\frac{\sin(m\pi/5)}{(m\pi/5)} \right]^2 \times \left[\frac{10\cos(10m\pi)}{\cos(m\pi)} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\sin(m\pi/5)}{(m\pi/5)} \right]^2 \times 10^2$$

b) $I(m=0) = 100 I_0$. Huomaa tässä, että $\sin(0)/0 = 1$.

$$\frac{I(m=3)}{I(m=0)} = \left[\frac{\sin(3\pi/5)}{3\pi/5} \right]^2 = 0,25457$$

4. Hilayhtälö $a\sin\theta = m\lambda$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$



Kuvasta: $\Delta\theta \approx \dfrac{3,00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2,50\ \mathrm{m}} = 0,00120\ \mathrm{(rad)}$

Pitää laskea mikä on tätä vastaava $\Delta\lambda$.

Derivoidaan hilayhtälö λ :n suhteen:

$$\frac{d}{d\lambda}(a\sin\theta) = \frac{d}{d\lambda}(m\lambda) \text{ eli}$$

$$a\cos\theta \frac{d\theta}{d\lambda} = m \Rightarrow d\lambda = \frac{a}{m}\cos\theta\, d\theta$$

Sijoitetaan tähän hilayhtälöstä: $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\dfrac{m\lambda}{a}\right)^2}$, jolloin

$d\lambda = \sqrt{\left(\dfrac{a}{m}\right)^2 - \lambda^2} \cdot d\theta$, josta approksimoidaan $\Delta\lambda = \sqrt{\left(\dfrac{a}{m}\right)^2 - \lambda^2} \cdot \Delta\theta$

Tässä tehtävässä

$a = (1/900)\ \mathrm{cm}\ = (1/900) \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$

$m = 1$

$\lambda \approx 550\ \mathrm{nm}\ = 550 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}.$

$\Delta\theta = 0,00120$

ja saadaan $\Delta\lambda \approx 13,3\,\mathrm{nm}$.

Jos käytetään $\lambda = 400\,\mathrm{nm}$ tai $\lambda = 700\,\mathrm{nm}$, niin molemmilla tulee $\Delta\lambda \approx 13,3\,\mathrm{nm}$

TAI

Näkyvällä alueella (550 nm) $\sin\theta = 1 \cdot \lambda / a \approx 0.0495$ eli $\theta \approx 2,8^\circ$ on pieni ja voidaan hyvin approksimoida $\sin\theta \approx \theta$. Hilayhtälö saa muodon $a\theta = \lambda$ ja tästä voidaan kirjoittaa suoraan $a\Delta\theta \approx \Delta\lambda$, joka antaa $\Delta\lambda \approx 13,3$ nm.

5. $I = I_0\left[\dfrac{2J_1(\gamma)}{\gamma}\right]$, missä $\gamma = \dfrac{1}{2}kD\sin\theta = \dfrac{\pi}{\lambda}D\sin\theta$

Tässä tehtävässä $\gamma = \dfrac{\pi}{632{,}8\times10^{-9}\,\text{m}}\cdot 118\times10^{-6}\,\text{m}\cdot\sin 0{,}5° = 5{,}112193328\,(\text{rad})$

Besselin funktioiden arvoja voi laskea esimerkiksi Excel-ohjelmalla: BESSELJ(5,1122;1) tai WolframAlphalla: BesselJ[1,5.1122]. Tavalla tai toisella tulos on $J_1(5{,}1122) = -0{,}33803$ ja intensiteetiksi saadaan

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{2\cdot J_1(5{,}1122)}{5{,}1122}\right]^2 = 0{,}01749 \approx 1{,}7\ \% .$$

6. 1. minimirenkaan suuntakulmalle θ pätee $D\sin\theta = 1{,}22\lambda$, josta $\theta \approx \dfrac{1{,}22\lambda}{D}$.

Viereisen kuvan perusteella $2\theta = \dfrac{2D}{L}$, joten $2\left(\dfrac{1{,}22\lambda}{D}\right) = \dfrac{2D}{L}$, josta saadaan

$$L = \frac{D^2}{1{,}22\lambda} = \frac{(2\times10^{-3}\,\text{m})^2}{1{,}22\cdot 632{,}8\times10^{-9}\,\text{m}} \approx 5{,}2\ \text{m}$$